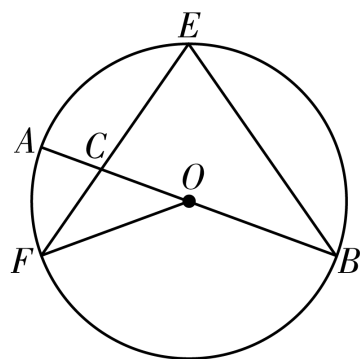


圆的综合独当一面

1. 2019年陕西中考真题 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， EF ， EB 是 $\odot O$ 的弦，且 $EF = EB$ ， EF 与 AB 交于点 C ，连接 OF ，若 $\angle AOF = 40^\circ$ ，则 $\angle F$ 的度数是()



A. 20°

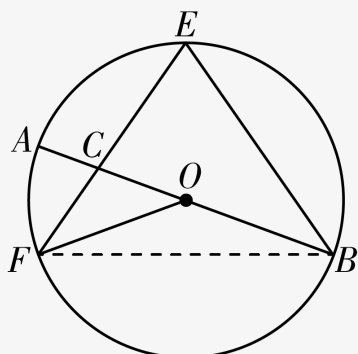
B. 35°

C. 40°

D. 55°

【答案】 B

【解析】 解：如图，连接 FB 。



$$\because \angle AOF = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle FOB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle FEB = \frac{1}{2} \angle FOB = 70^\circ,$$

$$\because EF = EB,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle EBF = 55^\circ,$$

$$\because FO = BO,$$

$$\therefore \angle OFB = \angle OBF = 20^\circ,$$

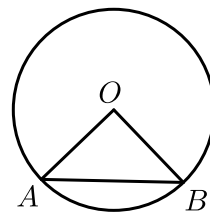
$$\therefore \angle EFO = \angle EFB - \angle OFB = 35^\circ.$$

故选：B。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

2. 2020年北京海淀区初三中考二模第7题2分 ★★

如图， $\odot O$ 的半径等于4，如果弦 AB 所对的圆心角等于 90° ，那么圆心 O 到弦 AB 的距离为（ ）。



A. $\sqrt{2}$

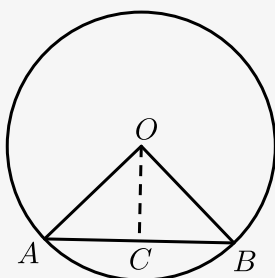
B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，



$$\because OA = OB = 4, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\because OC \perp AB,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2},$$

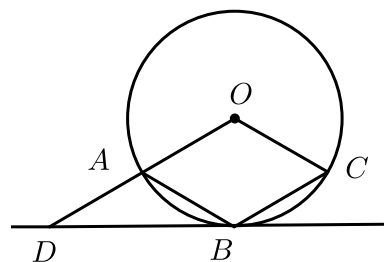
即 O 到 AB 距离为 $2\sqrt{2}$ ，

故选C。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

3. 2020~2021学年江苏无锡梁溪区无锡市南长实验中学初三上学期期中第8题3分 ★★

如图，菱形 $OABC$ 的顶点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OA 的延长线于点 D 。若 $\odot O$ 的半径为1，则 BD 的长为（ ）。



A. 1

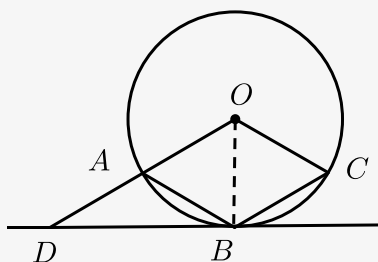
B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 C

【解析】连接 OB ,



$\therefore DB$ 是 $\odot O$ 的切线 ,

$\therefore \angle OBD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 为菱形 ,

$\therefore OA = AB$,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore OA = OB = AB$,

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形 ,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \angle ODB = 30^\circ$,

$\therefore OD = 2OB = 2$,

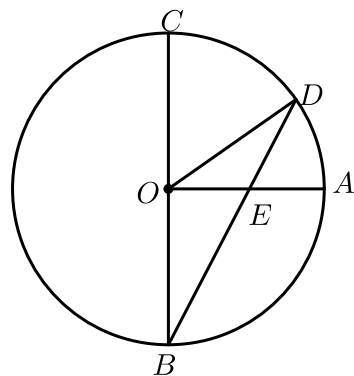
由勾股定理得 , $BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{3}$.

故选 C .

【标注】【知识点】切线的性质定理

4. 2020~2021 学年 11 月江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初三上学期周测 B 卷第 9 题 3 分 ★★

如图 , 已知 BC 是 $\odot O$ 的直径 , 半径 $OA \perp BC$, 点 D 在劣弧 AC 上 (不与点 A , 点 C 重合) , BD 与 OA 交于点 E . 设 $\angle AED = \alpha$, $\angle AOD = \beta$, 则 () .



A. $3\alpha + \beta = 180^\circ$

B. $2\alpha + \beta = 180^\circ$

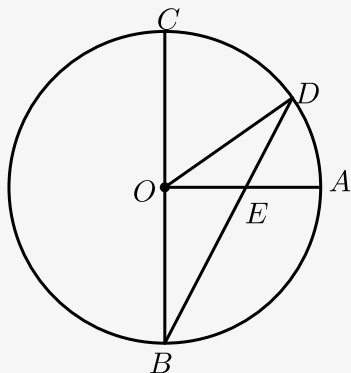
C. $3\alpha - \beta = 90^\circ$

D. $2\alpha - \beta = 90^\circ$

【答案】 D

【解析】 $\because OA \perp BC$,

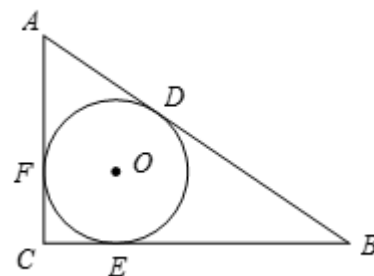
$\therefore \angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DBC = 90^\circ - \angle BEO = 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - \alpha$,
 $\therefore \angle COD = 2\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$,
 $\therefore \angle AOD + \angle COD = 90^\circ$,
 $\therefore \beta + 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ$,
 $\therefore 2\alpha - \beta = 90^\circ$,
 故选：D .



【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

5. 2015~2016学年广东广州越秀区初三上学期期末（模拟）第6题3分 ★★

如图， $\odot O$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边相切，切点分别为 D 、 E 、 F ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $AB = 10$ ，则 $\odot O$ 的半径等于（ ）.



- A. 6 B. 4.8 C. 5 D. 2

【答案】D

【解析】设 $\odot O$ 半径 r ，

连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD 、 OE 、 OF ，

$\because \odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，

切点为 D 、 E 、 F ，

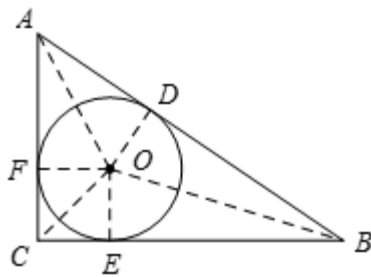
$\therefore OD \perp AB$ ， $OE \perp BC$ ，

$OF \perp AC$ ，

$OD = OE = OF = r$ ，

$$\because AC = 6, BC = 8$$

根据勾股定理可知，



$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

$$\because S_{\triangle ACB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}AC \times BC = \frac{1}{2}AC \times r + \frac{1}{2}BC \times r + \frac{1}{2}AB \times r$$

$$= \frac{1}{2}r(AC + BC + AB)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times r \times (6 + 8 + 10)$$

$$\text{则 } r = 2,$$

故答案为 D.

【标注】【知识点】三角形五心

6. 2018~2019学年10月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第8题3分 ★★

若地底面直径为 6 的圆锥的侧面展开图的圆心角为 216° ，则这个圆锥的高是 () .

A. 5

B. $\sqrt{91}$

C. 6

D. 4

【答案】D

【解析】由题意得，扇形得半径 $= \frac{l}{|\alpha|} = \frac{6\pi}{\frac{6}{5}\pi} = 5\text{cm}$ ，

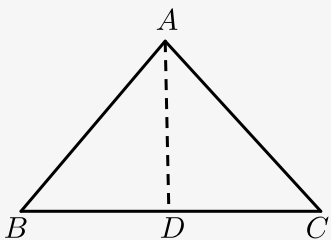
即 $AB = 5\text{cm}$ ，

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中， } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{AB^2 - (R)^2} = 4\text{cm}，$$

即圆锥的高为 4cm .

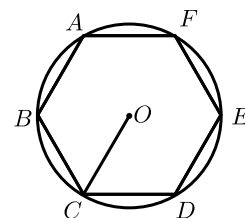
故选 D .



【标注】【知识点】求圆锥的高

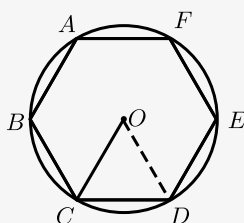
7. 2020~2021学年天津河东区初三上学期期末第14题3分 ★★

如图，六边形 $ABCDEF$ 是半径为 2 的 $\odot O$ 的内接正六边形，则劣弧 CD 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】 $\because$ 多边形 $ABCDEF$ 为正六边形，
 $\therefore \angle BCD = (6 - 2) \times 360^\circ \div 6 = 120^\circ$ ，
 则 $\angle OCD = 60^\circ$ ，
 连接 OD ，

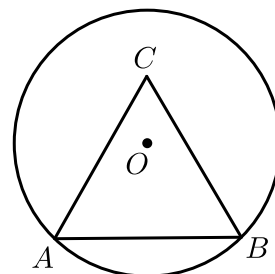


则 $OC = OD$ ，
 $\therefore \angle COD = 60^\circ$ ，
 $\therefore \widehat{CD} = \frac{60\pi \cdot 2}{180} = \frac{2}{3}\pi$.

【标注】【知识点】弧长公式

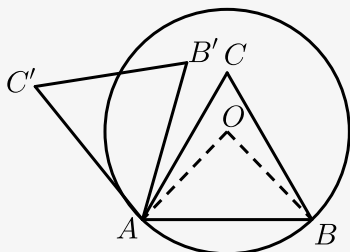
8. 2020~2021学年天津河东区初三上学期期末第17题3分 ★★

如图，正三角形 ABC 的边长为 2，点 A 、 B 在半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上，点 C 在圆内，将正三角形 ABC 绕点 A 逆时针旋转，当边 AC 第一次与圆相切时，旋转角为 _____ .



【答案】 75°

【解析】 如图，连结 OA 、 OB ，



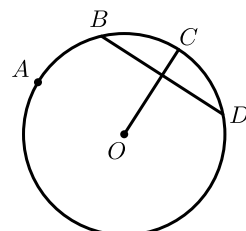
$\because OA = OB = \sqrt{2}, AB = 2,$
 $\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore \angle OAB = 45^\circ.$
 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle BAC = 60^\circ,$
 $\therefore \angle CAO = 15^\circ.$
 $\because AC'$ 与圆相切,
 $\therefore \angle C'AO = 90^\circ,$
 $\therefore \angle CAC' = 75^\circ,$
 $\therefore$ 当边 AC 第一次与圆相切时, 旋转角为 $75^\circ.$

【标注】【知识点】切线的性质定理

9. 2020~2021 学年天津和平区初三上学期期末第20题8分 ★★★★★

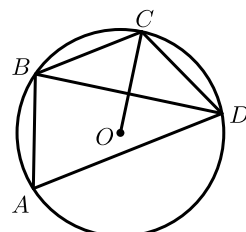
已知, $\odot O$ 中, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, D 是 $\odot O$ 上的点, $OC \perp BD$.

(1) 如图①, 求证 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



图①

(2) 如图②, 连接 AB, BC, CD, DA , 若 $\angle A = 70^\circ$, 求 $\angle BCD, \angle ADB$ 的大小.



图②

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\angle BCD = 110^\circ, \angle ADB = 35^\circ.$

【解析】(1) $\because OC \perp BD$, 连接 OB , OD , $OB = OD$,

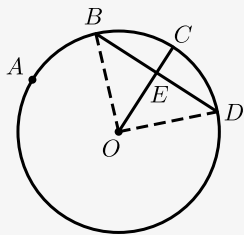


图 ①

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB,$$

$\therefore$ 在 $\triangle OBE$ 和 $\triangle ODE$ 中,

$$\angle OBE = \angle ODE, \angle BEO = \angle DEO, OE = OE,$$

$$\therefore \triangle OBE \cong \triangle ODE (\text{AAS}),$$

$$\therefore \angle BOC = \angle DOC,$$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD} \text{ (等角对等弧)},$$

$$\text{又} \because \widehat{AB} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}.$$

(2) 如图所示, 连接 OA , OB , OD ,

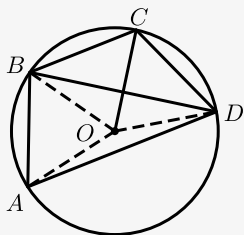


图 ②

$$\because \angle BAD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO + \angle OBD = 70^\circ,$$

$$\because OB = OA, OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA, \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle ODA = 70^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \angle OBD + \angle ODB = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\text{又} \because OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB = 20^\circ,$$

$$\text{又} \because OC \perp BD,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle OCB = (180^\circ - 70^\circ) \times \frac{1}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 2 \times 55^\circ = 110^\circ,$$

$$\text{又} \because \widehat{AB} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 70^\circ,$$

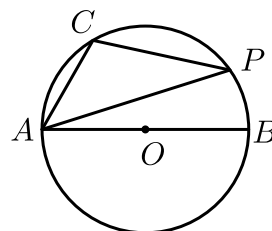
$$\begin{aligned}\therefore \angle AOD &= 360^\circ - 70^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 150^\circ, \\ \therefore OA &= OD, \\ \therefore \angle OAD &= \angle ODA = 15^\circ, \\ \therefore \angle ADB &= \angle ADO + \angle ODB = 15^\circ + 20^\circ = 35^\circ, \\ \therefore \angle BCD &= 110^\circ, \angle ADB = 35^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与全等

10. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期末第21题10分 ★★

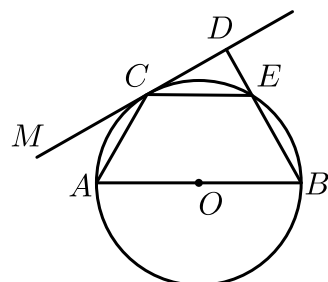
已知 $\odot O$ 的直径 $AB = 4$ ， C 为 $\odot O$ 上一点， $AC = 2$ ．

(1) 如图①，点 P 是 $\widehat{BC}$ 上一点，求 $\angle APC$ 的大小．



图①

(2) 如图②，过点 C 作 $\odot O$ 的切线 MC ，过点 B 作 $BD \perp MC$ 于点 D ， BD 与 $\odot O$ 交于点 E ，求 $\angle DCE$ 的大小及 CD 的长．

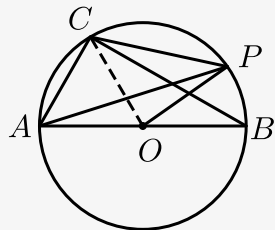


图②

【答案】(1) 30° ．

(2) 30° ； $\sqrt{3}$ ．

【解析】(1) 连接 OC ，



图①

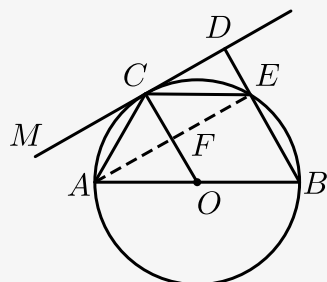
$$\begin{aligned}\therefore AB &\text{为}\odot O\text{的直径, } AB = 2AC, \\ \therefore OA &= OC = AC.\end{aligned}$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形 .

$\therefore \angle AOC = 60^\circ$.

$\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ$.

(2) 连接 AE , OC 与 AE 相交于 F ,



图②

$\because MC$ 是 $\odot O$ 的切线 ,

$\therefore MC \perp OC$.

$\because BD \perp MC$,

$\therefore \angle MCO = \angle CDB = 90^\circ$.

$\therefore BD \parallel OC$.

$\therefore \angle AFO = \angle AEB$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径 ,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$.

$\therefore \angle AFO = 90^\circ$.

$\therefore OC \perp AE$.

$\therefore \widehat{CE} = \widehat{AC}$.

$\therefore CE = AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

$\therefore AC = OA = OC$, 即 $\triangle AOC$ 是等边三角形 .

$\therefore \angle ECO = \angle ACO = 60^\circ$.

$\therefore \angle ECD = 30^\circ$.

$\therefore CD = \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系